REFLEXIONES ACERCA DE UN ESQUEMA ALTERNATIVO PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA

MANUEL SANTOS TRIGO *

Presentación

En el presente trabajo se intentan reconocer algunos elementos de influencia directa en la enseñanza de la matemática, con la intención de generar ejes que propicien una discusión integral en este problema tan actual y que urge sea abordado con una óptica amplia. El marco general es la historia de la matemática como elemento prioritario.

En los siglos XIX y XX el conocimiento matemático se ha estructurado en teorías elaboradas a partir del método axiomático, es decir se eligen como base ciertas proposiciones matemáticas no contradictorias (llamadas axiomas), para después obtener todas las demás proposiciones por deducción lógica a partir de las primeras.

Por ejemplo, si el tema es números reales entonces se propondrán ciertos axiomas iniciales.

1. a + b = b + a a,b, (Conmutatividad suma)
2. ab = ba a,b, (Conmutatividad producto)
3. (a + b) + c = a + (b + c) a,b,c, (Asociatividad suma)
4. a(bc) = (ab)c a,b,c,(Asociatividad producto)
5. Ö a, J$\sigma\varepsilon$ R m a + O = O + a = a (Elemento neutro, suma)
6. ...
7. etc.

Con estos axiomas iniciales se demostraría

i) a.O=O

ii) (-a) (-b) = ab

iii) (-a) (b) = (-ab)

iv) etc.

Lo anterior, aunado a la creciente generalización y abstracción de los conceptos matemáticos y al hecho de que actualmente existe el matemático como profesional, es decir que puede trabajar como matemático sin hacer aplicaciones necesariamente de sus conocimientos, ha influido de manera fundamental para que la enseñanza de la matemática se haga bajo estos mismos patrones. Se trata entonces de enseñar de lo general a lo particular y de lo abstracto a lo concreto. Estos principios fácilmente se constatan en los libros de matemáticas que empiezan generalmente con temas como conjuntos, funciones, etc., y cada tema se desarrolla primero deduciendo la teoría de las definiciones y axiomas para posteriormente citar los ejemplos pertinentes. Este enfoque de enseñanza de la matemática presenta indudablemente ciertas "ventajas", de las que podemos enumerar algunas:

*Profesor de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituta Politécnico Nacional.

1. La presentación sistemática y estructurada del material hace "comprensible" la matemática para todo aquel que pueda seguir el razonamiento del expositor.
2. El estudio de lo general supone economía del tiempo que se gastaría en el de muchos casos particulares.
3. Se puede ver mucho más material en poco tiempo ya que la velocidad es la del maestro y no la de los alumnos.

Sin embargo, entre sus "desventajas" se cuentan algunas de fundamental importancia

1. Lo general oculta lo particular. La presentación del material, en la forma más general posible, oculta al estudiante la riqueza contenida en las proposiciones matemáticas. Aun cuando después se proporcionen variados ejemplos.
2. Debido a que casi siempre generalizar conceptos implica hacerlos más abstractos, el estudiante piensa que la matemática es muy difícil o en todo caso caprichosa, artificiosa e inútil, esto último porque casi siempre las aplicaciones se hacen en problemas ideales (inventados) que no están de acuerdo con la realidad.
3. El método de exposición de conferencia es un método compatible con esta forma de enseñar, y dado que este método no garantiza que el estudiante vaya aprendiendo los conceptos de lo particular a lo general, se le deja que recorra este camino por sí solo.
4. Como con el método deductivo todas las proposiciones que no sean axiomas se demuestran, esto hace que el estudiante no distinga cuáles de estas proposiciones son las más importantes y cuáles las proposiciones secundarias.
5. Dado que la deducción lógica garantiza la veracidad de las proposiciones, esto mismo hace que se fomente la falta de motivación y aplicaciones del material que se enseña.
6. En este contexto de enseñanza no es fácil determinar cuáles son los conceptos más difíciles de aprender por los estudiantes, ya que todo se presenta al mismo nivel.

Con las características anteriores que denominamos "ventajas" y "desventajas" hemos descrito de manera resumida el modelo hegemónico actual de enseñanza de la matemática; con este marco surge inmediatamente la necesidad de presentar elementos que nos ayuden a reflexionar sobre el complejo problema de dicha enseñanza.

Nuestro punto de partida será reconocer que los avances o momentos importantes del desarrollo de la matemática, surgidos en los distintos periodos históricos, son productos de esas sociedades, pero no entendidas como un todo homogéneo. Intento señalar que los matemáticos produjeron o producen los avances en el marco de una realidad social determinada históricamente, pero inscritos en algún sector económico, social y filosófico de esa realidad. De lo anterior se desprende la necesidad de acercarse a dichos desarrollos de una manera crítica, indagando ese fenómeno desde un plano histórico-epistemológico y comprendiéndolo en su génesis y evolución a partir de sus determinaciones existenciales.

Parto de que el estudio de la historia de los conceptos matemáticos, nos proporciona ideas claras respecto a los obstáculos que impiden que ciertos conceptos matemáticos se den en determinadas situaciones y épocas históricamente determinadas, independientemente de que en todas las épocas históricas han existido "matemáticos inteligentes". Así nos podemos dar cuenta de la dificultad y del nivel de abstracción que presentan los conceptos y de aquí que nuestra pretensión no sea, como profesores, la de que un estudiante aprenda después de una brillante clase todo lo referente, por ejemplo, a la derivada si por otro lado sabemos que el trabajo de elaborar una definición "acabada" de derivada, ha sido un trabajo de años, incluso de siglos, que ha ocupado tal vez la mente de muchos brillantes matemáticos. Sabremos además qué situaciones favorecen para que se produzca la elaboración de determinado concepto y qué situaciones impiden esto mismo. Considero que estos elementos deben tomarse en cuenta para el diseño de planes y programas de estudio, actividades de aprendizaje, evaluación, etc.

Desarrollaré un ejemplo de las ideas anteriores conformadas en un tema particular, "El álgebra simbólica" que se enseña en el nivel medio superior.

En la evolución del álgebra se pueden distinguir tres etapas históricas

I) Algebra Retórica.
II) Algebra Sincopada.
III) Algebra Simbólica.

En estas diferentes etapas se abordan problemas similares con diferentes aparatos conceptuales; por ejemplo en la primera, la retórica, el enunciado y la resolución de un determinado problema era totalmente verbal, los problemas eran muy particulares y no había métodos generales de resolución. Esto comprendió una época desde el 4000 a. de C. hasta el 300 d. de C. que fue la época de la matemática babilónica, egipcia y griega.

La segunda época, la Sincopada, se caracteriza porque sustituye a los conceptos y operaciones que se usaban más frecuentemente por abreviaturas, de esta manera el álgebra sincopada era una especie de taquigrafía. Esta época comprende del siglo III al XIV aproximadamente y se identifica con la matemática hindú, árabe. En esta etapa prevalece todavía el tratamiento de problemas particulares con soluciones particulares.

La tercera época, la del Algebra Simbólica, representa un álgebra en donde todos los términos y la solución del problema son escritos por medio de símbolos; hay símbolos para las constantes, las variables y las operaciones, y esto permite casi por necesidad que se planteen problemas generales y se les da la solución también general.

El Algebra Simbólica reemplaza los procesos algebraicos verbales que efectúan las prácticas del álgebra retórica y sincopada, por procedimientos de cálculo simbólico, que sustituyen la difícil hilación de los razonamientos verbales por reglas para el manejo de símbolos de fácil comprensión y que en general requieren sólo de una explicación mecánica. Cabe mencionar también que se ha necesitado mucha experiencia para la solución de cierto tipo de ecuaciones, las cuales se efectuarán con procedimientos que requieren un mínimo de razonamiento en lugar de realizarse por largos y complicados razonamientos verbales.

El desarrollo de esta álgebra simbólica sugirió una multitud de generalizaciones y unificaciones. Por fin se pudo, por ejemplo, plantear el problema de la ecuación general de segundo grado para dar un procedimiento general de solución a la expresión $ax^2 + bx + c = 0$, que es la expresión más general posible para la ecuación de segundo grado. Su establecimiento se debe a que por fin se pudieron escribir las constantes por medio de símbolos, lo que permitió que de esta única expresión se conocieran todas las posibles ecuaciones particulares de segundo grado y además plantea la necesidad de encontrar todas las soluciones de esta ecuación general. Aquí se acostumbra relacionar a Vieta (1540-1603 aprox.) con este desarrollo.

Hasta este momento se ha descrito de manera muy resumida la evolución del "álgebra" hasta llegar a la etapa simbólica. Es natural preguntarse la utilidad de esta evolución de la enseñanza del álgebra hoy en día. Debido a lo que se escribe en la tercera etapa, se puede pensar que en ella se resuelven los problemas por medio de un cálculo simbólico y que en general la enseñanza del álgebra actualmente empieza precisamente con lenguaje simbólico y que en general la enseñanza del álgebra actualmente empieza precisamente con lenguaje simbólico y después se aplica en la solución de ecuaciones. En lo fundamental se está en lo correcto, sin embargo quiero plantear las siguientes interrogantes

¿No será que las dificultades que tiene un estudiante que ha recibido un curso de aritmética para entender el álgebra son semejantes a las que tuvieron los matemáticos para pasar de la aritmética a la elaboración del álgebra simbólica?

¿Por qué Vieta en el siglo XVI puede hacer lo que Diofanto no hace en el siglo III a pesar de que en cuanto a capacidades intelectuales se consideran más o menos similares?

¿Cuáles son las diferencias entre la Grecia del siglo III y la Europa del siglo XVI, que nos puedan explicar lo anterior?

¿Qué problemática abordan los matemáticos griegos del siglo III y cuáles los de la Europa del siglo XVI?

¿Cuáles eran sus actividades y sus profesiones?

¿Favorecían éstas a la elaboración de una simbolización y un cálculo simbólico?

¿Se pueden reproducir en el salón de clases condiciones semejantes o equivalentes? ¿Cuál es el camino que se debe seguir?

En conclusión considero que encontrar respuesta a estas preguntas nos aportaría elementos para reestructurar la enseñanza del álgebra con sus enfoques y métodos. Además el tema expuesto es un ejemplo particular de una aplicación que puede tener el conocimiento de la historia para mejorar la enseñanza de las matemáticas. Es obvio que esta idea puede hacerse en general para todos los cursos de matemáticas; de aquí desprendo la tesis que la historia de la evolución de los conceptos matemáticos es un elemento importante para elaborar una opción académica diferente.