

## LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN EL BACHILLERATO

Juan Recio Zubieta\*

En este artículo, pretendo hablar de los problemas que tienen al enseñar su materia los maestros de Matemáticas del bachillerato.

Algunos de los problemas aquí planteados se pueden generalizar a profesores de la misma materia que pertenecen a otros sistemas de enseñanza media y media superior.

Existe un momento crucial para la educación en México: La Reforma Educativa del 71. En el caso de Matemáticas este hecho reviste doble importancia porque es cuando llega a nuestro país la inclusión de la Matemática Moderna en todos los niveles de la enseñanza. El currículo de Matemáticas contempla temas nuevos como son Teoría de Conjuntos y Lógica Matemática.

En un afán unificador de las teorías Matemáticas se pretendió que el hilo conductor lo formaran los conjuntos y la lógica. Los profesores no estaban preparados para enfrentar esta situación por una o las dos situaciones que se describen a continuación:

1ª Desconocimiento de la Teoría de Conjuntos y de la Lógica Matemática. La mayor parte de los profesores de educación media y media superior usaban el lenguaje de los conjuntos pero nunca se había enfrentado a un uso formal de la teoría. Respecto a la Lógica Matemática el problema era aún más grave, ya que el desconocimiento era casi absoluto.

2ª Aunque se conozca la Teoría de Conjuntos y la Lógica Matemática, pretender organizar toda la estructura matemática alrededor de ellas está totalmente fuera del alcance de los fines de la educación media y media superior ya que ello implica un grado de rigor ininteligible e innecesario para el estudiante.

Lo anterior provocó en el profesorado altos niveles de improvisación y una búsqueda inútil de materiales que pudieran ser usados, en primer lugar, para la comprensión ( por parte de ellos) de los temas y, en segundo lugar, como materiales didácticos. Dado que lo primero fue difícil y lo segundo prácticamente imposible, el ímpetu inicial fue aminorado hasta desembocar en la rutina.

Al fracasar en la práctica el intento unificador, los Conjuntos y la Lógica pasaron a ser un tema más de la mayoría de los programas, sin prácticamente ninguna conexión con el resto de los temas. A pesar del fracaso evidente, no se buscó una explicación y mucho menos se intentó encontrar una solución.

Aunado a la Matemática Moderna, la reforma del 71 cuestionó los métodos tradicionales de la enseñanza y aportó una serie de nuevos planteamientos que acabaron desubicando al profesorado. Trataremos de explicar esto último.

El profesionista que dedicaba parte o todo su tiempo a la enseñanza, tenía un ejemplo a seguir el de sus maestros, y unos conocimientos que enseñar, los aprendidos por él sin ninguna modificación. Lo anterior se rompe bruscamente y el nuevo profesor se encuentra con que tiene que integrar conocimientos nuevos a los viejos ( lo cual no logra de una manera adecuada o simplemente no logra ) y el modelo que representan sus maestros está siendo fuertemente cuestionado.

Se pregunta muy seriamente sobre el significado de “aprender a aprender”, de “aprender a hacer”, de “aprender a ser” y de la “interdisciplina”, vocabulario puesto de moda por la reforma, y al no encontrar una respuesta única, pues circulan en el medio muchas interpretaciones, su confusión aumenta. ¿Qué hacer para resolver el problema de la enseñanza? ¿Cómo ayudar al alumno para que aprenda mejor? Ante estas preguntas se opta en algunos casos por una pseudo versión de la concepción humanista de la educación (el alumno es

---

\*Profesor de Carrera Titular “A” de Tiempo Completo. Unidad Académica de los Ciclos Profesional y de posgrado, Colegio de Ciencias u Humanidades, UNAM.

responsable de su educación) y en otros, la mayoría en este caso, hacia la tecnología educativa. Analicemos las repercusiones de lo anterior:

En el caso de la concepción humanista se cae en el extremo de liberarse de la responsabilidad de educar, y cuando el alumno no entiende por deficiencias en su formación anterior, el maestro evade la responsabilidad diciendo: “eso ya lo debías saber”, sin darse cuenta que lo único que logra es un desánimo en el estudiante y por consecuencia el fracaso en el aprendizaje de la materia (tan fácil que hubiera sido una breve explicación). En pocas palabras el maestro se dedica a los alumnos que con él, sin él, o a pesar de él, hubieran aprendido.

Tal vez sea poco ligero mencionar la Teoría Humanista de la educación ya que sus fines son mas nobles; pero no me atreví a tratar de irresponsables o de una manera más fuerte a los que se manejan en este esquema y olvidan que cobran por enseñar a todos sus alumnos y no sólo a los que ya saben (sé que algunos dirán que lo actual no es cobrar y tengo que darles la razón; pero ello no los libra de la responsabilidad que significan sus alumnos).

En cuanto a la tecnología educativa que tanto ha privado en el medio, la mayoría de los maestros aprendieron a hacer programas, a redactar objetivos, a planear sus clases ( en el mejor de los casos), pero no aprendieron cómo mejorar los cursos, ni lograron que los estudiantes aprendieran más y mejor.

El maestro organizaba muy bien sus clases; pero el alumno no siempre estudia, y para cerrar el cuadro, el maestro no entendía porque el alumno no entendía.

Muy pronto comprendieron que la planeación manejada de una manera tan rígida no ayudaba mucho, y acabaron cayendo en el desorden, esto es, a veces se intentaba planear y otras se llegaba a clase y se preguntaba ¿Qué vimos la clase pasada?, y a partir de ahí, a improvisar.

¿Qué era lo que estaba mal en la tecnología educativa?, aunque parezca extraño, la respuesta es nada; entonces ¿Cuál es el problema?, uno solo: no basta, ya que la tecnología nos ayuda a planear la enseñanza; pero no nos ayuda a comprender el proceso de aprendizaje y sin esta comprensión el dueto inseparable: enseñanza/aprendizaje no se da.

“ Mientras las teorías del aprendizaje tratan de las maneras en que un organismo aprende, las de la enseñanza se ocupan de las maneras en que una persona influye en un organismo para que este aprenda. . . Para satisfacer las demandas prácticas de la educación las teorías del aprendizaje deben ser “puestas de cabeza”, de tal modo que se produzcan, entonces, las teorías de la enseñanza” (Cage, 1964).

¿Qué hacer entonces? Tal vez el mejor camino actualmente sea recurrir a las teorías psicológicas de la educación y a algunas de sus aplicaciones pedagógicas; pero, ¿de qué hablan estas teorías?.

### **Trataremos de dar una respuesta breve.**

La Teoría de Jean Piaget sigue un modelo de equilibrio en lo que a su formalización teórica se refiere, donde la conducta es vista como resultado de la articulación de estructuras que poseen mecanismos de regulación y transformación. Así como funciones que permiten adaptarse y ajustarse a las exigencias del medio.

Un postulado importante que subyace en la Teoría piagetana es la continuidad biológica que plantea toda una corriente de la Psicología. Dentro de tal postura Piaget logra establecer tres estadios que dan cuenta del desarrollo del pensamiento humano: a) el sensoriomotriz, b) el de las operaciones y c) el de la formalización.

Nos limitaremos a hablar de los estadios de las operaciones y de la formalización, pues se supone que es ahí donde deben estar los alumnos de los niveles medio y medio superior.

El segundo estadio se conforma de dos etapas: la preoperatoria y la denominada operatoria.

Piaget denomina preoperatoria a la primera etapa debido a que en ella se prepara o construye la interiorización de las operaciones en dos niveles: a) Por un lado aparece el manejo de hipótesis o pensamiento virtual, pero todavía ligado a la operación o acción sobre objetos, como una prolongación de la etapa anterior, o sea que

responde a la Lógica de la acción. Esta circunstancia se refiere a la necesidad del tiempo para interiorizar las acciones del pensamiento, lo cual supone su reconstrucción en un nuevo plano; b) asimismo la reconstrucción supone una descentralización continua mucho mayor que al nivel sensoriomotriz.

En la segunda etapa de este estadio el niño enfrenta los mismos problemas pero ahora resueltos con mayor facilidad, por las interiorizaciones, coordinaciones y descentralizaciones crecientes que lo conducen a la forma general de equilibrio que constituye la reversibilidad operatoria, conquista suprema de esta etapa.

Se asiste así a la formación de operaciones como: reuniones y disociaciones de clase (origen de clasificaciones); encadenamiento de relaciones  $a b c \dots$  (origen de las seriaciones); correspondencia (origen de las tablas de doble entrada); síntesis de las inclusiones de clase y de orden serial (lo que da origen a los números); separaciones especiales y desplazamientos ordenados (de donde surge su síntesis que es la medida).

La cualidad de esta etapa es, con todo, limitada, se refiere por una parte a objetos presentes y no a hipótesis; por otra parte, las operaciones que se alcanzan proceden poco a poco en oposición a futuras operaciones combinatorias y proposicionales cuya movilidad es muy superior.

El tercer estadio se caracteriza en general por la conquista de un nuevo modo de razonamiento que no se refiere solamente a objetos o realidades directamente representables, sino también a “hipótesis”, es decir a proposiciones de las que pueden extraerse las necesarias conclusiones, sin decidir sobre su verdad o su falsedad.

Se asiste a la formación de nuevas operaciones llamadas proposiciones en oposición de operaciones concretas: implicaciones, disyunciones, conjunciones, contradicciones, etc.

Dos son las características de este nivel: a) la combinatoria que se aplica tanto a los objetos o a los factores físicos, como a las ideas y las proposiciones; b) a cada operación proposicional corresponde una inversa y una recíproca.

Piaget afirma: “el lenguaje no es suficiente para transmitir la lógica y sólo es comprendida mediante instrumentos de asimilación lógicos de origen más profundo.”

“El producto de construcciones sucesivas y el factor principal de este constructivismo reside en un equilibrio mediante autorregulaciones que permiten poner remedio a las incoherencias momentáneas, resolver los problemas y superar las crisis o desequilibrios mediante una constante elaboración de estructuras nuevas que la escuela puede ignorar o favorecer”.

En el sector educativo un número importante de maestros ha leído a Piaget; pero, ¿Qué han hecho con lo leído?, ¿se dan cuenta que la primera forma de aprendizaje de las Matemáticas fue la memorización y que la mayor parte de sus alumnos no la ha abandonado?, ¿notan que un porcentaje alto de sus alumnos se encuentra en la etapa de las operaciones concretas? y, en caso afirmativo ¿Qué hacen con esto?

Gaston Bachelard, al estudiar el progreso de la ciencia, afirma:

“Se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza a la espiritualización”.

“Se llega a la convicción de que hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos”.

“La noción de obstáculo epistemológico puede ser estudiada no tan sólo en el desarrollo histórico del pensamiento científico, sino también en la práctica de la educación”.

Bachelard señala que el profesor imagina que siempre se puede rehacer una cultura descuidada repitiendo una clase, que se puede hacer comprender una demostración repitiéndola punto por punto; no han pensado que el adolescente llega a la clase con conocimientos empíricos ya constituidos. No se trata de adquirir una cultura experimental, sino de cambiar una cultura experimental, de tumbar los obstáculos ya amontonados por la vida cotidiana.

El primero de los obstáculos epistemológicos que cita Bachelard es la experiencia básica, la cual no es guiada por un razonamiento fundamentado sino por nociones espontáneas, no es sistemática, es acrítica, no es objetiva, no busca relacionarse con sistemas teóricos. En contraposición tenemos la experiencia científica que está fundamentada en la razón, es discutida con rigor, es sistemática, crítica, y busca relacionarse con sistemas teóricos.

El profesor de Matemáticas debería evitar la fácil generalización (otro de los obstáculos epistemológicos) y el abuso de la experiencia cotidiana, ya que podría imbuir en sus alumnos una falsa concepción de la ciencia.

El profesor también debe tener claro, al intentar enseñar algo que el alumno olvidó o conoce mal, que una mera repetición no basta para subsanar la deficiencia: tiene que “destruir” (lo mal adquirido) para poder construir.

Se recomienda, también, leer a autores como Ausubel y Novak, quienes hablan sobre tipos de aprendizaje: “la manera más importante de diferenciar los tipos de aprendizaje en el salón de clases consiste en formular dos distinciones de proceso, definitivas, que los seccionen a todos ellos; la primera distinción es la de aprendizaje por recepción y por descubrimiento, y la otra, entre aprendizaje por repetición (o mecánico) y significativo.”

En el aprendizaje por recepción (por repetición o significativo), el contenido total de lo que se va aprender se le presenta al alumno en su forma final. En la tarea de aprendizaje el alumno no tiene que hacer ningún descubrimiento independiente. Se le exige que internalice o incorpore el material que se presenta, de modo que pueda recuperarlo o reproducirlo en fecha futura.

En el aprendizaje por recepción significativo, la tarea o material potencialmente significativos son comprendidos o hechos significativos durante el proceso de internalización.

En el aprendizaje por recepción y repetitivo, la tarea de aprendizaje no es ni potencialmente significativa ni tampoco convertida en tal durante el proceso de internalización.

“El rasgo esencial del aprendizaje por descubrimiento, sea de formación de conceptos o de solucionar problemas, es que el contenido principal de lo que va a ser aprendido no se da, sino que debe ser descubierto por el alumno antes de que pueda incorporar lo significativo de la tarea a su estructura cognoscitiva. La primera fase de aprendizaje por descubrimiento involucra un proceso muy diferente al del aprendizaje por recepción. El alumno debe reordenar la información, integrarla con la estructura cognoscitiva existente, y reorganizar o transformar la combinación integrada de manera que se produzca el producto final deseado o se descubra la relación entre medios y fines que hacía falta”.

Es interesante hacer notar que Ausubel le da una enorme importancia al aprendizaje por recepción (el esquema clásico de la escuela tradicional); pero haciendo la salvedad de que debe ser significativo.

Ausubel contrapone aprendizaje significativo a aprendizaje memorístico. Es significativo un aprendizaje cuando puede incorporarse con lo ya aprendido por el estudiante.

Lo anterior va encaminado a las teorías del aprendizaje de las cuales el constructivismo parece ser la respuesta adecuada a la enseñanza de las ciencias. ¿Y qué existe respecto a las aplicaciones pedagógicas?. Un ejemplo hermoso lo constituye el trabajo de los esposos Van Hiele sobre la enseñanza de la Geometría, el cual trataremos de resumir a continuación:

El trabajo de los esposos Van Hiele se enfoca sobre los niveles del pensamiento en Geometría (cinco en total, de los cuales el último cae fuera de los objetivos de la enseñanza media) y el papel que juega la enseñanza en ayudar a los estudiantes a pasar de un nivel a otro.

#### **A continuación presentaremos los niveles:**

Nivel 1. Visualización (reconocimiento). El estudiante identifica figuras por su apariencia global, esto es, no reconoce explícitamente los componentes y propiedades de los objetivos.

Resuelve problemas rutinarios manipulando las figuras más que usando sus propiedades.

Nivel 2. Análisis. El estudiante percibe las figuras como formadas de partes. Describe los objetos de manera informal. Encuentra nuevas propiedades; pero no establece relaciones entre lo observado.

Nivel 3. Deducción informal (clasificación). El estudiante puede establecer las interrelaciones de las propiedades de las figuras de una manera informal. Puede deducir informalmente propiedades de las figuras. Puede seguir un razonamiento paso a paso; pero no comprende la demostración formal ni siente la necesidad de ella.

No distingue entre proposición y su inversa.

Nivel 4. Deducción formal. El estudiante puede realizar demostraciones nuevas o proponer nuevos caminos para demostrar una proposición. Comprende el papel de los términos indefinidos, de los axiomas, definiciones, teoremas y demostraciones. Entiende la interacción entre las condiciones necesarias y suficientes.

Nivel 5. Rigor. ( Este nivel sólo se llega a dar en estudiantes de cursos superiores de ciencias). El estudiante ve la Geometría desde un punto de vista abstracto. Puede comparar diferentes sistemas geométricos.

Los niveles tienen una serie de características que enunciaremos a continuación:

- **Recursividad:** Los elementos implícitos en un nivel se hacen explícitos en el siguiente:
- **Secuencialidad:** no es posible alcanzar un nivel de razonamiento sin haber superado los anteriores. Con el aprendizaje memorístico se aparenta estar en un nivel superior porque se ha aprendido un vocabulario y formas de trabajo del nivel superior, aunque realmente no se comprende ni se utilice correctamente.
- **Especificidad del lenguaje:** cada nivel lleva asociado un tipo de lenguaje para comunicarse y un significado específico del vocabulario matemático.
- **Continuidad:** el tránsito entre los niveles se produce de forma continua y pausada, pudiendo durar varios años en el caso de los niveles 3, 4 y 5 .
- **Localidad:** un estudiante no se encuentra en el mismo nivel en cualquier área de la Geometría, pues el aprendizaje previo y los conocimientos que tenga son un elemento básico en su habilidad de razonamiento.

El modelo propone a los profesores cinco fases de aprendizaje para ayudar a los estudiantes a pasar de un nivel de pensamiento a otro. Su carácter es cíclico ya que permiten que el estudiante, tras recorrer las cinco fases, alcance un nivel superior al que tenía. Aunque las fases sean las mismas los contenidos matemáticos, el lenguaje y la forma de resolver los problemas varía de un nivel a otro. Las cinco fases son las siguientes:

- **Información:** al empezar un tema nuevo el profesor debe informar sobre lo que se va a trabajar y qué tipo de problemas se van a resolver. Esta fase sirve también de diagnóstico sobre el tema a tratar.
- **Orientación dirigida:** los estudiantes exploran el campo de investigación a través del material que les proporciona el profesor, este material debe ser presentado de forma que las estructuras se presenten de manera progresiva.
- **Explicitación:** esta fase es fundamentalmente de diálogo entre los estudiantes, con intervención del profesor cuando sea necesario. Tiene dos objetivos básicos: socialización del lenguaje del nivel y reflexión “en voz alta” .
- **Orientación libre:** aplicación de los nuevos conceptos. Esto se consigue mediante asignación de tareas que, preferiblemente, puedan desarrollarse de diferentes maneras o llevar a diferentes resultados.
- **Integración:** en esta fase el profesor debe tratar de resumir, en un todo, el campo que han explorado los alumnos y lograr que integren lo que acaban de aprender.

Las fases de aprendizaje tienen una secuencia lógica que no se debe alterar. La excepción es la tercera fase que hay que entender como una dinámica continua y no como un período de tiempo.

Se podría seguir hablando de algunos otros autores como Vygotski y su concepto de la zona de desarrollo próximo, o como Kruteskii y su trabajo sobre las habilidades matemáticas, o inclusive continuar con alguno de los autores ya citados; pero este artículo se haría interminable. Deseamos que lo anterior inquiete a algunos profesores y que, por sí solos, busquen mayor información.

En fin, parece ser que el profesor que esté interesado en sus alumnos y preocupado en mejorar su aprendizaje tiene por delante una ardua labor que, sin embargo, parece más definida hoy que cuando iniciaron su labor de educadores, lo cual no implica que ésta sea más fácil.

## **BIBLIOGRAFIA**

AUSUBEL, David P., Helen Hanesian y Joseph D. Novak. Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo. Editorial Trillas. México.

BACHELARD, Gaston. El desarrollo del pensamiento científico. Siglo XXI Editores. México.

BONFIL, Alicia et al. Informe de trabajo del grupo Sigma. CCH del Período 1991-1991.

FUYS, David. The Van Hiele model of thinking in Geometry among adolescent. City University of New York. New York.

GUTIERREZ, Angel y Adela Jaime. El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo; Los giros. Depto. de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia. Valencia, España.

KRUTETSII, V. A. The Psychology of Mathematical abilities in Schoolchildren. The University of Chicago. Chicago.

PIAGET, Jean. Seis estudios de Psicología. Edit. Seix Barral. Barcelona.

RUIZ ZUÑIGA, Angel. Las matemáticas modernas en las Américas. Filosofía de una reforma. Escuela de Matemáticas, Universidad de Costa Rica. San José.

VYGOTSKY, L.S. El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Grupo Editorial Grijalvo. México.